Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
пытавшимся решать электрод через проективное пространству и пространство
потом всё свелось к проективным группам
https://ru.wikipedia.org/wiki/Проективная_группа
очень рекомендую
И про грассмановы числа рассказал
https://ru.wikipedia.org/wiki/Грассманиан
А ещё они есть в книжке Смилги «Квантовая теория поля на обед»
не устаю её всем рекомендовать
Ну а мы что пока порешаем задачки по никчёмному электроду

Замечание один: ёмкость существует ТОЛЬКО из системы РОВНО ДВУХ проводников.
Если вас просят найти ёмкость одного тела – присмотритесь, рядом должно быть второе, включите его в систему. Если вас просят найти ёмкость трёх тел – наверное, от вас хотят найти три попарные ёмкости (об этом ещё будет сказано в самом-самом конце).
Что же такоё ёмкость?
Пусть у первого проводника будет заряд q, а у второго –q. Тогда между телами будет напряжение U. В частности, её можно найти, вычислив потенциалы обоих проводников φ_1 и φ_2, а затем найти $U=|\varphi_1-\varphi_2|$.
Величина q/U и будет ёмкостью.

Рассмотрим первую задачу.

ЗАДАЧА 20.1

20.1. Найти зависимость емкости системы двух проводящих шаров с радиусами R_1 и R_2 от расстояния L между ними, $L \gg R_1 \sim R_2$.

Зарядим первое тело зарядом q, второе –q. Если L достаточно велико, можно пренебречь влиянием индуцированных зарядов и считать, что шары друг на друга не влияют. Тогда потенциал первого будет q/R1, а потенциал второго – q/R2 (напомню, что потенциал шара или сферы зарядом q и радиусом R на его поверхности есть q/R). Напряжение тогда будет U=q(1/R1+1/R2), а ёмкость C=1/ (1/R1+1/R2).
Ёмкость в СГС имеет размерность длины, что отражает её смысл – это геометрический параметр системы из двух проводников.

Заметим, что ответ достаточно грубый. Давайте решим задачу точнее, учтя влияние шаров друг на друга.
Потенциал первого будет q/R1 (от себя) и (-q)/(L-R1) от второго. Суммарно φ_1= q*(1/R1-1/(L-R1)).
Потенциал второго будет -q/R2 (от себя) и q/(L-R2) от первого. Суммарно φ_2= -q*(1/R2-1/(L-R2)).

$C=q/|\varphi_1-\varphi_2|=1/(1/R1-1/(L-R1)+1/R2-1/(L-R2))$. Если считать $1/(L-R1)\approx1/(L-R2)\approx1/L$, то получаем $1/(1/R1+1/R2-2/L)$. Именно такой ответ у Чугреева, только ему ещё зачем-то изображения понадобились, хотя в этой задаче они не нужны.

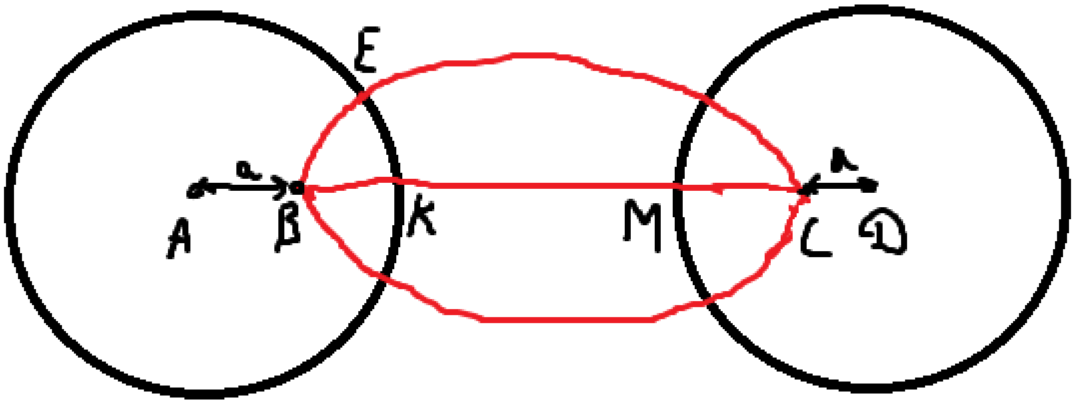
ЗАДАЧА 20.1А

20.1а. Найти потенциал системы, состоящей из двух проводящих шаров, имеющих одинаковые радиусы R. Расстояние между центрами шаров равно L, причем $L \gg R$. Первый шар незаряжен, а заряд второго равен q. Вычисления провести с точностью до $(R/L)^3$.

Соколов решает эту задачу с помощью метода Соколова: он её не решает и переходит сразу к 20.2.

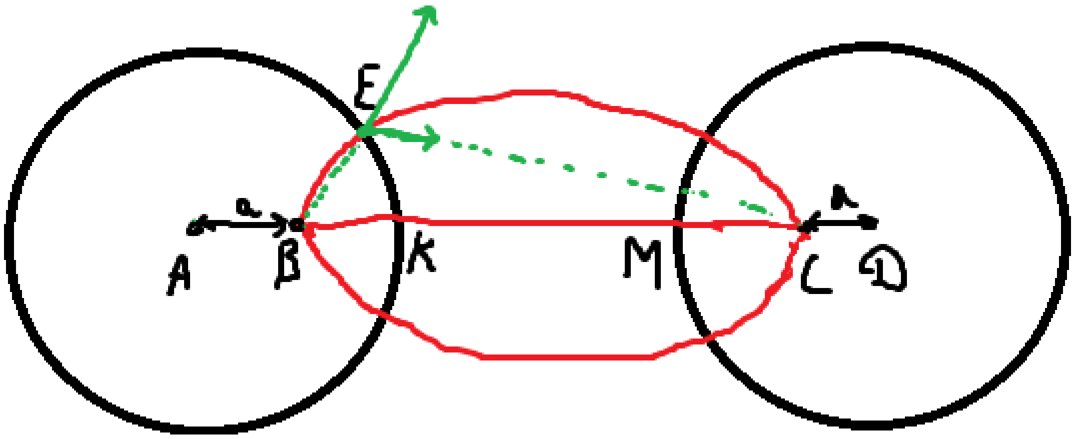
Чугреев же предлагает положить в 20.1 R1=R2=R, получить ответ $C=1/(2/R-2/L)=2RL/(L-R)$. Остальная часть решения – обоснование, почему этот ответ имеет достаточную точность.

Я бы решал 20.1а долго, но строго: в лоб, методом изображений: нужно догадаться, где находятся изображения и какого они заряда.



Решение задачи разбивается на два шага:

1) Установить заряд и местоположение изображений. Для этого надо найти поле на поверхности сфер от двух изображений. Надо найти две зелёные напряжённости, их векторно просуммировать и написать, что суммарный вектор нормален поверхности.



Метод изображений позволяет узнать, какое поле находится между сфер.
Я не буду решать пункт 1) ввиду громоздких выкладок.
2) Напряжение между между сферами ищется как интеграл по КМ от поля, которое мы найдём в пункте 1.
В частности, если окажется, что изображения имеют заряды Q и –Q, а также мы найдём расстояние a на рисунке, то U будет

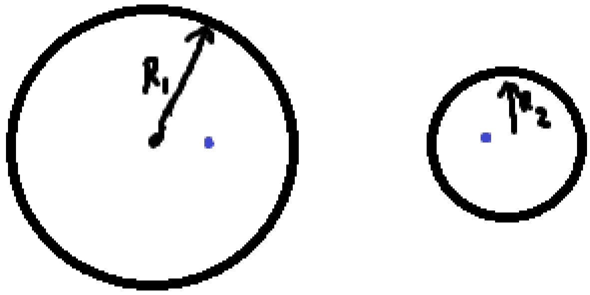
$$2\int_{-L/2+R}^{L/2-R} \frac{Q}{\frac{L}{2}-a-x}\,dx$$

Ноль оси абсцисс в центре симметрии. Тогда расстояние до первого изображения до точки с абсциссой x будет как раз L/2-a-x. А двойка обусловлена тем, что интеграл от первого заряда будет равен интегралу от второго заряда.
Финальный шаг – поделить q/U – будет самый простой.

Повторюсь, этот моё видение строгоuj решения 20.1а, а Соколов и Чугреев халтурят ☺

ЗАДАЧА 20.2

20.2*. Определить емкость единицы длины двух параллельных бесконечных цилиндрических проводников. Радиусы проводников равны R_1 и R_2, расстояние между осями $L > R_1 + R_2$.



Вероятно, вы нарисуете такой рисунок и скажете, что надо искать изображения (фиолетовые точки). Сразу скажу, что тут, в отличие от 20.1а, R1 не равно R2 и искать изображения будет очень сложно. Надо действовать проще, как в 20.1, благо что тут такая точность (аж до третьего порядка малости) от нас не требуется.

Однако нужно вспомнить, что закон Кулона в 2D выглядит как $F=\frac{q_1q_2}{r}$;

а формула для потенциала $\varphi=\frac{q}{\ln r}$ (для Васи, кричащего «размерность!!!» - F здесь линейная плотность силы, φ – линейная плотность потенциала).
Почему такие странные результаты? Потому что ур-е Лапласа $\Delta\varphi=0$ решается в 2D чуть иначе и там получается не $\frac{1}{r}$, а $\frac{1}{\ln r}$ (помните ММФ?)
Теперь давайте адаптируем решение 20.1 под 20.2:
Зарядим первое тело зарядом q, второе –q.
Нулевое приближение: считаем, что круги друг на друга не влияют. Тогда потенциал первого будет q/(ln R1), а потенциал второго –q/(ln R2).
Напряжение тогда будет U=q(1/lnR1+1/lnR2), а ёмкость C=1/ (1/lnR1+1/lnR2).
Первое приближение: потенциал первого будет q/lnR1 (от себя) и (-q)/ln(L-R1) от второго. Суммарно φ_1= q*(1/lnR1-1/ln(L-R1)).
Потенциал второго будет -q/lnR2 (от себя) и q/ln(L-R2) от первого. Суммарно φ_2= -q*(1/lnR2-1/ln(L-R2)).
C=q/| φ_1- φ_2|=1/ (1/lnR1-1/ln(L-R1) + 1/lnR2-1/ln(L-R2)). Если считать 1/ln(L-R1)≈1/ln(L-R2)≈1/lnL, то получаем 1/ (1/lnR1 + 1/lnR2 - 2/lnL).
Эту задачу Чугреев не расписал, поэтому я не знаю, какой порядок точности нужен.

ЗАДАЧА 20.3 (начало)

20.3. Доказать теорему взаимности.

Эта теорема о том, что (определение Чугреева):

20.3 Теорема взаимности.

Рассмотрим систему проводников (N штук), которые жестко закреплены в пространстве. При нанесении на эти проводники зарядов Q_i, которые распределятся по их поверхности и более не двигаются (случай статики), потенциал электрического поля на этих поверхностях постоянен и мы обозначим их φ_i $(i=\overline{1,N})$. Если же на эту систему проводников нанести другие заряды Q_i', то соответствующие потенциалы мы обозначим как φ_i'. Теорема взаимности утверждает, что $\sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i Q_i' = \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i' Q_i$ (объемных зарядов нет, только поверхност.)

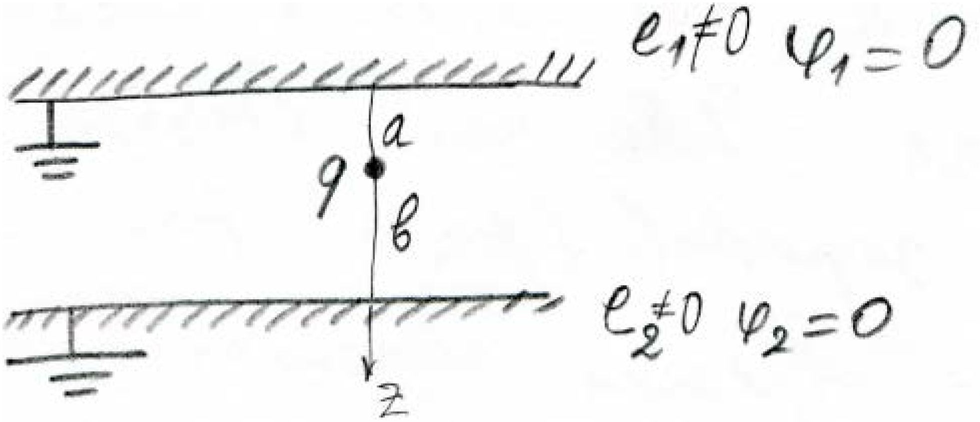
На первый взгляд кажется, что в последней строчке записана полная энергия системы. Однако полная энергия в первом случае $\sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i Q_i$, а во втором $\sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i' Q_i'$, и они, конечно, могут быть не равными. А вот у нас утверждается равенство двух величин, имеющих размерность энергий (но таковыми не являющихся!), где штрихи «перепутаны». Присмотритесь.

Доказательство этой теоремы приведено после 20.3а, а пока отметим, что она оказывается полезна для решения некоторых задач, например

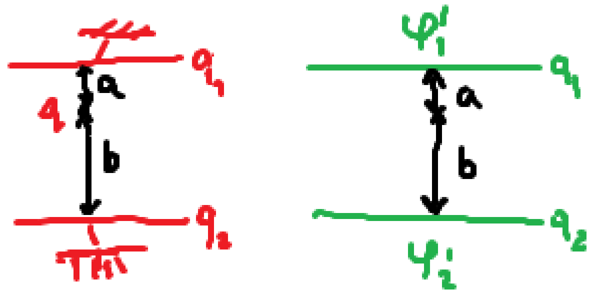
ЗАДАЧА 20.3а

20.3а. Точечный заряд q расположен между бесконечными параллельными заземленными проводящими плоскостями. Расстояния от заряда до плоскостей равны a и b, соответственно. Используя теорему взаимности, найти заряды, индуцированные на каждой из плоскостей.

Итак, решаем!



Давайте признаемся – нам ОЧЕНЬ не нравится заряд посередине. Он сильно усложняет картину. А нельзя ли сделать как-нибудь, чтобы его не было?
Да. Рассмотрим штрихованную систему. В ней мы чуть перераспределим заряды между нашими тремя телами: точкой посередине и двумя пластинами. (На рисунке старая система красная, новая система зелёная).



Естественно, в новой штрихованной системе точка посередине будет незаряженной, чтобы у нас были просто две пластины, которые легко считаются!
Сделаем на верхней пластине потенциал φ_1, а на нижней потенциал φ_2 (это будут штрихованные, новые потенциалы φ_1' и φ_2'). Тогда потенциал точки посередине будет $\dfrac{b\varphi_1' + a\varphi_2'}{a+b}$. Это будет $\varphi'_{\text{точки}}$.

А теперь давайте считать две суммы.
Первая:

$$\sum q_i \varphi_i' = q_1 \varphi_1' + q_2 \varphi_2' + q \cdot \underbrace{\frac{b\varphi_1' + a\varphi_2'}{a+b}}_{\varphi'_{\text{точки}}}$$

Вторая:

$$\sum q_i'\varphi_i = \underbrace{q_1'\varphi_1}_{=0} + \underbrace{q_2'\varphi_2}_{=0} + \underbrace{q'_{точки}\varphi_{точки}}_{=0}$$

Оказывается вся =0.

Получаем, что

$$q_1\varphi_1' + q_2\varphi_2' + q\cdot\frac{b\varphi_1' + a\varphi_2'}{a+b} = 0$$

Теперь давайте вспомним, что в новой штрихованной системе мы вправе взять 0 потенциал где угодно, да и вообще φ_1' и φ_2' мы вольны брать какие угодно. Занулив φ_1', получим

$$q_2\varphi_2' + q\cdot\frac{a\varphi_2'}{a+b} = 0$$

, откуда однозначно находится нужный нам q_2.

Занулив φ_2', получим $q_1\varphi_1' + q\cdot\frac{b\varphi_1'}{a+b} = 0$, откуда однозначно найдём нужный нам q_1.

Подведём итоги. Теорема о взаимности хороша тогда, когда мы можем построить хорошо просчитываемую систему, убрав мешаюшийся нам заряд. Так же она нам нашла суммарные заряды на пластинах в нештрихованном случае, а вот найти поверхностную плотность в разных точках плоскостей – нет уж, извините, тут она бессильна.

Так, я обещал доказательство теоремы о взаимности.

ЗАДАЧА 20.3 (окончание)

Начнём с вот такого утверждения:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} q_i$$

Потенциал j-того проводника определяется зарядами всех других проводников, каждый со своим весовым коэффициентом a_{ij}. Обратная ему величина $C_{ij}=1/a_{ij}$ называется взаимным ёмкостным коэффициентом (помните, что я говорил в начале методички? Это и есть «попарная ёмкость»). Чем дальше i-тый проводник от исходного j-того, тем, естественно, его вклад (выражающийся через a_{ij}) меньше.
(Будем считать a_{jj} с повторяющимся индексом =0 – проводник сам на себя не влияет).
Кажется, эта формула стала для вас очевидной? Отлично. Через неё мы докажем нашу теорему в два счёта:
Нужно доказать:

$$\sum_j q_j \varphi'_j \ ? \ \sum_j q'_i \varphi_i$$

Преобразуем каждую из частей:

$$\sum_j q_j \varphi'_j = \sum_j q_j \sum_i a_{ij} q'_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} q_j q'_i$$

$$\|$$

$$\sum_j q'_i \varphi_i = \sum_j q'_i \sum_i a_{ij} q_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} q'_i q_i$$

Это не единственное возможное док-во теоремы взаимности. Оно было придумано мною (ну как мною, $\varphi_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} q_i$ написал Шишанин Андрей Олегович, остальное сам). Есть и более сложные-длинные-противные, которые предложили Чугреев (посмотрите сообщение Дарьи Агаповой за 2 июня 2021 года, файлик «семинары» - там оно есть) и Соколов (electrod vesna med, в одном из первых сообщений к этой теме).